一种新的过程统计稳态能力评价指数

王维志
湖北汽车工业学院机械工程系，湖北 十堰 442002

摘　要：在分析了过程能力指数Cp和过程性能指数Pp的适用局限性以后，提出了一种新的指数Fp，用于评价生产过程的统计稳态和识别过程的异常影响因素。基于概率和数理统计的基本理论，对新指数的构建原理进行了分析论证，在理论上证明了新指数对过程稳态评价的客观性和适用性。利用一个磨削加工过程的现场采样数据，对新指数进行了应用验证。新指数计算简单，有量化的判断准则，适合在生产现场环境下的使用。

关键词：过程能力指数 Cp；过程性能指数 Pp；统计稳态；F 分布

A New Capacity Evaluation Index for Process Statistical Steady State

Weizhi Wang
Dept. of Mechanical Engineering, Hubei Automotive Industries Institute, Shiyan,442002
weizhiwang@sina.com

Abstract: After analysing applicable limitations of process capability index Cp and process performance index Pp, we put forward a new evaluation index, which can evaluate statistical stability in a production process, and identify abnormal influence factors. Based on probability and mathematical statistics basic theory, we analysed and proved application principle of the new index, and proved that the new index had objectivity in evaluation in theory. With grinding process sampling data, we verified the new index applicability. The new calculation is simple, and has quantitative criterion, the new index is useful in production site.

Keywords: Process Capability Index Cp; Process Performance Index Pp; Statistical Steady State; F Distribution

引言

在自动化程度高的机械加工制造领域，生产过程需要具备足够的能力和统计稳定性。影响过程能力和稳定的因素很多，例如机器精度的不确定性、环境的影响、人为操作的细小差别等。从生产过程管理和调节角度看，影响过程统计稳定的因素有随机和异常之分，随机影响因素不可或不易调节，只影响过程的波动范围，异常因素则不同，可能导致过程输出偏离原有的分布，波动范围显著变大或出现中心偏倚，结果导致产品质量下降甚至出现批量的废品，异常影响因素需要加以识别和消除。早先人们过程能力指数Cp (Process capability index)和过程性能指数Pp (process performance index)分析过程的能力和统计稳定性。随着过程控制变量的多元化和复杂化，人们还设计了空间多元过程能力指数(spatial multivariate process capability index) [1]、模糊过程能力指数(fuzzy process capability index) [2]、模糊环境下非对称公差过程能力指数(process capability index with asymmetric tolerances under fuzzy environment) [3]以及基于模糊数据的过程能力指数Cpmk(process capability index with fuzzy data) [4]。一般来说，统计稳定性表征了过程的持续能力，是过程能力的重要方面，上述各种能力指数虽然试图对过程能力做出更精确的评价，但对过程的统计稳定性方面的评价能力是不足的。

本文以机械加工生产过程为背景，基于概率和数理统计的有关理论，建立一种新的过程稳态评价指数，其特点是考虑了样本数量导致的概率分布，从而能够在一定的显著性水平条件下对过程是否处于统计稳态做出定量的评价。

1 新过程稳态评价指数 Fp

1.1 经典过程稳态评价方法的局限性

如果从生产过程状态空间抽取样本，采用不同的数据处理方法,获得两个含义不同的过程能力指数 Cp 和过程性能指数 Pp，Cp 衡量的是过程的固有波动特性，Pp 衡量的是过程的综合波动特性。当过程内部仅存在随机影响因素，理论上 Cp 和 Pp 具有相同的取值，如果生产过程存在异常因素且影响是显著的，Pp 的取值显著不同于 Cp。因此理论上联合使用 Cp 和 Pp 可以实现异常因素的识别。在一个机械加工的生产过程中，异常因素总是存在的，当它们影响不够显著时，对加工过程输出不构成明显的影响，只有当异常因素影响显著时，才是调节过程的最佳时机，因此只有当异常因素影响显著时，及时的识别是有意义的。在实际的应用中，Cp 取值和 Pp 取值相差多少才算显著不同，目前的过程能力评级指数体系缺少一个明确的量化界定标准，这是 Cp 和 Pp 在识别异常因素上的局限性。

另外由于 Cp 和 Pp 都是随机变量，它们的估计值和样本数量有关，当样本数量不是足够大的情况下，抽样本身存在误差，显然利用有限样本估计 Cp 和 Pp 值，并直接比较它们的大小得出的结论不够严谨。目前自动化程度高的加工制造企业例如汽车制造业，广泛使用 SPC (Statistical Process Control)控制图评价过程的统计稳定程度，SPC 控制图直观反映过程的综合波动，根据样本点的分布状态就可以判断是不是有异常因素存在，这往往需要操作者具有比较丰富的实践经验。另外，SPC 控制图对于小的变异不够敏感，更不能实现定量分析。

1.2 基于概率分布的过程能力指数 Fp

为了能够定量的评价生产过程的统计稳定程度，即判断异常影响因素是不是显著，基于概率分布的概念，建立一种新的过程统计能力评价指数，称作 Fp,其中字母 F 的含义表示该指数基于 F 分布原理建立，和 Cp、Pp 指数比较，Fp 的取值是一个概率分布区间，考虑了样本容量、样本数量和显著性水平的影响，能够更客观地量化评价异常因素的影响程度，从而对过程的统计稳态程度做出推断。

1.3 样本数据的采集

无论是计算 Cp、Pp 还是计算 Fp，都要从过程总体采集样本，评价的目的不同，采集样本的方法也有不同的要求。对机械加工过程来说，按时间（加工）顺序从过程总体采集样本，为了评价过程的固有能力，理论上应该在较短的时间间隔内完成一个样本的采集，连续地采集一组数据作为一个样本，不必有间隔停顿，采样周期内可以近似地认为生产过程的工况（刀具磨损、环境变化等）没有发生显著变化，满足数理统计理论上的独立同分布要求。为了评价过程的综合波动特性，考虑切削加工过程中时间变量因素，即随着加工进程（时间）进行，刀具会按着一定规律发生磨损，机械部件的不均匀热变形导致部件相对位置发生变化，故不同的样本可通过适度长的时间间隔抽取，以便在不同样本数据之间反映工况的动态变化情况,更详细的分析见参考文献[5,6]。

1.4 新指数 Fp 模型的构建

从预防为主控制产品质量的角度看，理想的切削加工过程应满足统计稳态的要求。在实际的生产加工过程中，假定在一个适当长度的时间间隔内，忽略刀具磨损和机床的热变形的影响，工件尺寸的变差主要是受到各种随机因素的影响，因此假定该过程的输出近似服从正态分布。设从该切削加工过程中抽取 k 个样本，每个样本包含 n 个独立的产品特性值，称作样本观测值，全部的观测值记做：

$$x_{ij}=（x_{11},x_{12},\ldots x_{1n}；\ \ldots；\ x_{k1},x_{k2},\ldots x_{kn}），i=1,2,\ldots k;\ j=1,2,..n \tag{1}$$

样本数据中，任何一个产品特性值可以用式(2)来表示：

$$x_{ij} = \overline{x}_{..} + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \tag{2}$$

式中的 $\overline{x}_{..}$ 表示全部样本数据的总平均值，ε_{ij} 是随机影响因素引起的波动在 x_{ij} 上的体现，记第 i 个样本的均值为 $\overline{x}_{i.}$ ，α_i 是第 i 个样本的均值和总均值之差，反映样本均值的变差，当过程满足统计稳态要求，ε_{ij} 和 α_i 均相互独立，且服从正态分布。将 ε_{ij} 和 α_i 平方进行累加求和，如公式(3)和公式(4)所示：

$$S_t = n\sum_{i=1}^{k}(\overline{x}_{i.} - \overline{x}_{..})^2 \tag{3}$$

$$S_e = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_{i.})^2 \tag{4}$$

依据数理统计有关定理[7]，S_t 和 S_e 属于随机变量，且分别拥有的自由度为 k_1=k-1 和 k_2=k(n-1)，随机变量 S_t 和 S_e 分别服从自由度为 k_1 和 k_2 的 X^2 分布，令 S_t 和 S_e 除以各自的自由度，分别记为 S_t^2 和 S_e^2， S_t^2 和 S_e^2 仍然是随机变量，即：

$$S_t^2 = \frac{S_t}{k-1} \tag{5}$$

$$S_e^2 = \frac{S_e}{k(n-1)} = \frac{1}{k(n-1)}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}^2 \tag{6}$$

两个独立的随机变量，自由度为 k_1 和 k_2 且服从 X^2 分布时，它们的比值构成 F 分布。显然 S^2_t 和 S^2_e 的比值符合 F 分布的定义，令：

$$Fp = \frac{S_t^2}{S_e^2} = \frac{kn(n-1)\sum_{i=1}^{k}(\overline{x}_{i.} - \overline{x}_{..})^2}{(k-1)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_{i.})^2} \tag{7}$$

从而构成新的过程能力检验指数 Fp，由于该指数仍然属于随机变量且服从 F 分布，因此可以利用 F 检验原理比较 S^2_t 和 S^2_e 的差异程度。

下面从公式(5)和(6)的物理意义出发，进一步考察利用 F 检验原理比较 S^2_t 和 S^2_e 差异程度的合理性，公式(6)中仅包含了随机变差 ε_{ij}，无论生产过程是否处于统计稳态，可以证明单个样本的均方差 S^2_1 ， S^2_2 ，… ，S^2_k 都是过程总体方差的无偏估计量 σ^2。而合并方差 S^2_e（以各处理内的自由度 n -1 为权的加权平均数）是具有更高的估计精度的过程总体方差的无偏估计量 σ^2。

将公式(2)移项整理得到公式(8)：

$$\overline{x}_{..} = x_{ij} - \alpha_i - \varepsilon_{ij} \tag{8}$$

将公式(8)代入公式(5)得到：

$$S_t^2 = \frac{n}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2 \tag{9}$$

理论上可以证明 $n\sigma_\alpha^2+\sigma^2$ 是 S_t^2 的无偏估计量[7]，其中 σ_α^2 称作效应方差。一般来说，各观测样本之间的差异包含两部分，一是各样本均值本质上的差异，二是样本的抽样误差。当过程保持统计稳态的条件下，样本均值没有本质上的差异，σ_α^2 的大小由抽样误差决定，也就是说，判断一个过程是不是处于统计稳态，就看样本间是不是存在本质上的差异。α_i 是随机变量，直观上无法看出样本间是不是存在本质差异，使用 Fp，能够在一定的置信水平下判断出样本间是否存在本质差异，显然是有价值的。

Fp 是一个随机变量，可以通过和参考取值的比较，判断其中是否包含样本间的本质差异，从 Fp 的构造原理看，参考取值需来自于 F 分布，当样本数量确定和选定显著性水平以后，可以通过计算或查表确定临界参考取值。计算的 Fp 小于临界参考取值，说明在一定概率水平上采集的样本数据间无本质差异，过程处于统计稳态。

显然，使用 Fp，考察过程统计稳态不再以指数的绝对大小作为依据，而是在某个概率水平条件下考察样本

数据间有无本质差异，从而判断过程是不是处于统计稳态。

计算 Fp 需要确定显著性水平α，统计学理论认为[7]，α≤0.05 是统计学意义的边界线， 0.01<α≤0.05 被认为是具有统计学意义，而 0.001≤α≤0.01 被认为具有高度统计学意义。对于机械加工领域，一般可取 0.01<α≤0.05。α取值小，误判的概率就小，当然漏判的概率就大，需要综合权衡考虑。

对于一个具体的机械加工过程，抽取一定数量的样本数据，依据公式(5)、(6)和(7)计算过程的 Fp 值。通过查表获得临界参考值，如果计算的 Fp 值小于临界参考值，说明机械加工过程处于统计稳态，过程内部人、机、料、法、环全部环节上都不存在显著的异常影响因素。如果当前产品质量是合格的，未来一段时间内，良好的产品质量也是可以预期的。

2 新指数 Fp 应用举例

以某型号柴油发动机零件气门挺杆的磨削加工过程为例，研判磨削过程是否处于统计稳态,本例以表面粗糙度值作为特征观测值，选择 n=4,k=10；按加工时序采集样本数据，参照本文 2.3 节所述采样方法，全部原始数据列于表 1，选取显著性水平为 α=0.05，临界参考值 $F_{0.05}(9,40)=2.12$ 查 F 分布表获得[8]。依据相关公式计算过程的 Fp 值，查表和计算数据列于表 2。

表 1 原始采样数据

样本	观测值（微米）					样本均值
1	2.04	1.95	1.74	1.85	1.97	1.914
2	2.01	2.03	2.20	1.99	2.03	2.058
3	1.89	1.99	1.97	1.99	2.00	1.9728
4	1.89	1.88	1.79	2.06	1.78	1.8842
5	1.92	2.08	1.86	2.01	1.76	1.9316
6	2.03	2.01	2.04	1.80	1.92	1.9638
7	1.79	1.94	2.05	1.84	1.92	1.913
8	2.00	1.97	2.01	2.12	2.15	2.0546
9	2.01	1.97	2.13	1.86	1.94	1.9878
10	1.86	1.97	1.98	2.01	2.01	1.9714

表 2 计算数据列表

误差数据类型	S_T^2	S_e^2	S_t^2
平方和	0.516	0.365	0.151
自由度	49	40	9
均方		0.0091	0.0168
Fp 值（计算获得）	Fp= 1.85		
右尾临界值（查表获得）	$F_{0.05}(9, 40)=2.12$		

表 2 数据显示，计算的 Fp 小于临界参考取值，说明在（1-α）%的概率水平上各样本均值之间不存在本质上的差异，进一步推断过程中无异常影响因素或异常因素的影响不显著，由此得出的结论是在整个采样时间段内加工过程处于统计稳态。

3 结束语

为了保证机械加工过程持续的产出合格的产品，必须识别生产过程异常因素的影响是否显著，从生产过程采集样本，如果样本均值之间不存在显著差异，过程就是统计稳态的，产品的质量就是有保障的。一般来说，样本均值是随机变量，之间既存在本质差异，又存在采样误差，本质差异由异常因素引起，当本质差异显著时，说明生产过程偏离了统计稳态，需要加以调节，因此识别样本均值间本质差异是否显著是评价过程统计稳态问题的关键。新的过程稳态评价指数 Fp 基于概率论和数理统计的基本原理，将样本之间的本质差异和采样误差加以分离，来判断过程的统计稳定性，识别过程异常因素影响的显著性。在理论分析论证以后，通过一个磨削加工过程的实例，对过程输出的特征观测数据进行了统计分析，得出的结论与现场管理经验以及其它分析方法(SPC)得出的结论基本一致，初步验证了新过程稳态评价指数 Fp 在实际生产中的适用性。

参考文献

[1] ShaoxiWang. A spatial multivariate process capability index[C]//IEEM2010 - IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management, 2010, 1443-1445.

[2] Parchami, A., Mashinchi, M. and Maleki, H.R.Confidence interval for fuzzy process capability index[J]. WSEAS Transactions on Systems, v 4, n 5: May 2005, 546-551.

[3] Kahraman Cengiz.A process capability index with asymmetric tolerances under fuzzy environment[C]// Proceedings of 2010 IEEE

[4] International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering, ISKE 2010,430-435.

[5] Abdolshah, Mohammad, Yusuff, Rosnah Mohd.and Hong, Tang Sai. Measuring process capability index Cpmk with fuzzy data and compare it with other fuzzy process capability indices[J]. Expert Systems with Applications, v 38, n 6: June 2011, 6452-6457.

[6] Weizhi Wang. The Research of Production Process Statistical Steady-state Based on the Hypothesis Test[C]//ADME 2011, Guangzhou 2011. 9. Advanced Materials Research Vols. 2011, 2433-2538.

[7] Weizhi Wang. Research of Grinding Wheel Wear Modeling Based on Hypothesis Test Principle[C]//ICMSE 2012, Xiamen, 2012.3.Advanced Materials Research Vols. 2012,3053-3057.

[8] 沈恒范. 概率论与数理统计教程[M]. 第五版. 北京：高等教育出版社，2010.

[9] 张公绪等. 新编质量管理学[M]. 北京：高等教育出版社，1998.

【作者简介】

王维志（1953.10-），男，汉族，副教授，研究方向：研究方向包括机械产品设计制造、机械加工过程管理、质量管理、机电控制自动化等。机械加工过程管理、质量管理的研究以大批量自动化生产过程模式为主，包括过程能力的分析研判，统计稳态的研判和变异的识别，单件小批量生产模式下的过程能力统计分析和预测控制也有涉及。
研究主要以冷切削加工为背景，同时也涉及复杂生产过程的统计控制应用与研究。
Email:weizhiwang@sina.com